

Topología I

Examen XIV

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Topología I

Examen XIV

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Roxana Acedo Parra

Granada, 2026

Asignatura Topología I.

Curso Académico 2025/2026.

Grado Grado en Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Antonio Alarcón López.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 14 de enero de 2026.

Duración 180 minutos.

Ejercicio 1. En $\mathbb{Z}$ se considera la familia:

$$\mathcal{B} = \{\{2m - 1, 2m, 2m + 1\}, m \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{2m + 1\}, m \in \mathbb{Z}\}.$$

- a) Prueba que $\mathcal{B}$ es base de una topología $\mathcal{T}_K$ en $\mathbb{Z}$. Al espacio topológico $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$ se le denomina recta de Khalimsky.
- b) Sea $A = \{-3, -2, 1, 2, 3\} \subset \mathbb{Z}$. Calcula el interior y la clausura de A .
- c) Dado $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico, se dice que $(X, \mathcal{T})$ es T_0 , si para cada par de puntos $x, y \in X$, $x \neq y$ existe V_x entorno de x tal que $y \notin V_x$ o existe V_y entorno de y tal que $x \notin V_y$. Prueba que $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$ es T_0 . ¿Es T_1 ?
- d) Estudia la conexión y la compacidad de $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$.
- e) Comprueba que $f : (\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K) \rightarrow (\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$ es continua si y solo si:
 - e1) Si x es par y $f(x)$ es impar entonces $f(x \pm 1) = f(x)$.
 - e2) $|f(x \pm 1) - f(x)| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{Z}$.
- f) Consideremos en $\mathbb{R}$ la relación de equivalencia

$$xRx' \iff x = x' \quad \text{o} \quad x, x' \in [2m - 1/2, 2m + 1/2] \quad \text{o} \\ x, x' \in](2m + 1) - 1/2, (2m + 1) + 1/2[, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Demuestra que $(\mathbb{R}/R, \mathcal{T}_u/R)$ es homeomorfo a $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$.

Ejercicio 2. Enuncia el Lema del Tubo y el Teorema de Tychonoff. Demuestra el Teorema de Tychonoff.

Ejercicio 3. Una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ entre espacios topológicos se dice propia si para todo K compacto de $(Y, \mathcal{T}')$ se tiene que $f^{-1}(K)$ es un compacto de $(X, \mathcal{T})$.

- a) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico T_2 e $(Y, \mathcal{T}')$ un espacio topológico compacto. Prueba que si $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ es propia entonces f es continua. ¿Es cierto el recíproco?
- b) Prueba que toda aplicación continua $f : (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{S}^1, \mathcal{T})$ es propia, donde $\mathcal{T}$ es la topología inducida de la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 1. En $\mathbb{Z}$ se considera la familia:

$$\mathcal{B} = \{\{2m-1, 2m, 2m+1\}, m \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{2m+1\}, m \in \mathbb{Z}\}.$$

- a) Prueba que $\mathcal{B}$ es base de una topología $\mathcal{T}_K$ en $\mathbb{Z}$. Al espacio topológico $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$ se le denomina recta de Khalimsky.

Veamos que se verifican las propiedades B1 y B2. En primer lugar es claro que

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \{2m-1, 2m, 2m+1\},$$

por lo que $\mathbb{Z} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.

En segundo lugar estudiamos los casos en los que dos elementos distintos de $\mathcal{B}$ tienen intersección no vacía:

Caso 1: $\{2m-1, 2m, 2m+1\} \cap \{2m+1\} = \{2m+1\} \in \mathcal{B}$ y $\{2m-1, 2m, 2m+1\} \cap \{2m-1\} = \{2m-1\} \in \mathcal{B}$.

Caso 2: $\{2m-1, 2m, 2m+1\} \cap \{2m+1, 2m+2, 2m+3\} = \{2m+1\} \in \mathcal{B}$ y $\{2m-1, 2m, 2m+1\} \cap \{2m-3, 2m-2, 2m-1\} = \{2m-1\} \in \mathcal{B}$.

Por lo tanto, si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ con $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ entonces $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ y se cumple trivialmente B2.

Observemos que una base de entornos de la topología $\mathcal{T}_K$ es: $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ si x es impar, $\mathcal{B}_x = \{\{x-1, x, x+1\}\}$ si x es par.

- b) Sea $A = \{-3, -2, 1, 2, 3\} \subset \mathbb{Z}$. Calcula el interior y la clausura de A .

$\text{int}(A) = \{-3, 1, 2, 3\}$ ya que para esos puntos tenemos los entornos abiertos $\{-3\}$ y $\{1, 2, 3\}$ contenidos en A , y $\{-3, -2, -1\}$ no está contenido en A , por lo que A no es entorno de -2 .

$\text{cl}(A) = \{-4, -3, -2, 0, 1, 2, 3, 4\}$ ya que los entornos de la base de entornos de esos puntos cortan al conjunto A , y si $p \in \mathbb{Z}$ no está en $\{-4, -3, -2, 0, 1, 2, 3, 4\}$ podemos encontrar un entorno de p que no corta a A .

- c) Dado $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico, se dice que $(X, \mathcal{T})$ es T_0 , si para cada par de puntos $x, y \in X$, $x \neq y$ existe V_x entorno de x tal que $y \notin V_x$ o existe V_y entorno de y tal que $x \notin V_y$. Prueba que $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$ es T_0 . ¿Es T_1 ?

Veamos que es T_0 . En primer lugar consideramos $2m+1$ para $m \in \mathbb{Z}$ y $p \in \mathbb{Z}$ con $p \neq 2m+1$. Es claro que $\{2m+1\}$ es un entorno de $2m+1$ que no contiene a p . En segundo lugar consideramos $2m, 2m' \in \mathbb{Z}$ con $m < m'$. En ese caso tenemos $\{2m-1, 2m, 2m+1\}$ un abierto de $2m$ que no contiene a $2m'$.

La recta de Khalimsky no es T_1 ya que por ejemplo, 1 y 2 no verifican la definición de T_1 . No existe ningún entorno de 2 que no contenga a 1.

- d) Estudia la conexión y la compacidad de $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$.

Los abiertos básicos de la forma $\{2m-1, 2m, 2m+1\}$ son conexos ya que son los abiertos más pequeños que contienen a $2m$ (por lo que la única separación que admite dicho conjunto es la trivial). Además podemos escribir

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \{2m-1, 2m, 2m+1\}.$$

Observemos que esto es una unión de conexos tal que cada uno de ellos corta al siguiente. Por tanto $\mathbb{Z}$ es conexo.

Por otra parte es sencillo comprobar que la recta de Khalimsky no es compacta. Efectivamente, podemos considerar el recubrimiento de $\mathbb{Z}$,

$$\mathcal{A} = \{\{2m - 1, 2m, 2m + 1\} : m \in \mathbb{Z}\}.$$

De este recubrimiento no podríamos sacar un subrecubrimiento finito porque cualquier subrecubrimiento finito sólo contendría un número finito de números enteros.

e) Comprueba que $f : (\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K) \rightarrow (\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$ es continua si y solo si:

e1) Si x es par y $f(x)$ es impar entonces $f(x \pm 1) = f(x)$.

e2) $|f(x \pm 1) - f(x)| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{Z}$.

Recordemos que f es continua en x si y solo si para toda $B' \in \mathcal{B}_{f(x)}$ existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $f(B) \subset B'$.

Supongamos que f es continua y sea x un número par. Supongamos en primer lugar que $f(x)$ es impar. Entonces tenemos que $B' = \{f(x)\}$ y $B = \{x - 1, x, x + 1\}$ y f es continua en x si y solo si $f(\{x - 1, x, x + 1\}) \subset \{f(x)\}$, es decir si y solo si $f(x \pm 1) = f(x)$.

Supongamos ahora que $f(x)$ es par. Entonces $B' = \{f(x) - 1, f(x), f(x) + 1\}$ y $B = \{x - 1, x, x + 1\}$ y f es continua en x si y solo si $\{f(x \pm 1), f(x)\} \subset \{f(x) \pm 1, f(x)\}$.

Observemos que esto y lo anterior implican e2) en el caso x par. Si x es impar para obtener e2) basta aplicar e2) a $x + 1$ y $x - 1$ que son pares.

Recíprocamente, supongamos que se verifica e1) y e2). Por lo visto en la implicación anterior se tendría que f es continua en los números pares. Notemos que cualquier f es continua en x si x es un número impar ya que en este caso $B = \{x\}$ siempre verifica $f(B) \subset B'$ para cualquier B' .

f) Consideremos en $\mathbb{R}$ la relación de equivalencia

$$xRx' \iff x = x' \quad \text{o} \quad x, x' \in [2m - 1/2, 2m + 1/2] \quad \text{o} \\ x, x' \in](2m + 1) - 1/2, (2m + 1) + 1/2[, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Demuestra que $(\mathbb{R}/R, \mathcal{T}_u/R)$ es homeomorfo a $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$.

Consideremos la aplicación $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \rightarrow (\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2m & \text{si } x \in [2m - \frac{1}{2}, 2m + \frac{1}{2}] \\ 2m + 1 & \text{si } x \in](2m + 1) - \frac{1}{2}, (2m + 1) + \frac{1}{2}[\end{cases}$$

Veamos que f es una identificación. Claramente f es sobreyectiva. Veamos que $\mathcal{T}_K = (\mathcal{T}_u)_f$.

Observemos en primer lugar que $f^{-1}(\{2m+1\}) =](2m+1) - \frac{1}{2}, (2m+1) + \frac{1}{2}[$ y $f^{-1}(\{2m-1, 2m, 2m+1\}) =](2m-1) - \frac{1}{2}, (2m+1) + \frac{1}{2}[$ son abiertos de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$. Por tanto f es continua y esto implica que $\mathcal{T}_K \subset (\mathcal{T}_u)_f$.

Falta ver que $(\mathcal{T}_u)_f \subset \mathcal{T}_K$. Sea $O \in (\mathcal{T}_u)_f$, entonces sabemos que $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_u$ por ser $(\mathcal{T}_u)_f$ la topología final para la aplicación f . Veamos que $O \in \mathcal{T}_K$ comprobando que es entorno de todos sus puntos. Si $2m+1 \in O$ para algún $m \in \mathbb{Z}$, entonces $\{2m+1\} \subset O$ y O es entorno de $2m+1$. Consideremos ahora $2m \in O$ para $m \in \mathbb{Z}$ entonces $[2m - \frac{1}{2}, 2m + \frac{1}{2}] \subset f^{-1}(O)$ y $2m \pm \frac{1}{2} \in f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_u$. Por tanto, existe $0 < \epsilon < 1/2$ tal que $(2m - \frac{1}{2} - \epsilon, 2m + \frac{1}{2} + \epsilon) \subset f^{-1}(O)$. Luego $\{2m-1, 2m, 2m+1\} = f((2m - \frac{1}{2} - \epsilon, 2m + \frac{1}{2} + \epsilon)) \subset O$, y O es entorno de $2m$. Concluimos que $O \in \mathcal{T}_K$.

Es claro que $R = R_f$ por definición de la aplicación f y por tanto la aplicación $\tilde{f} : (\mathbb{R}/R, \mathcal{T}_u/R) \rightarrow (\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$ es un homeomorfismo.

Ejercicio 2. Enuncia el Lema del Tubo y el Teorema de Tychonoff. Demuestra el Teorema de Tychonoff.

Teoría dada en clase.

Ejercicio 3. Una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ entre espacios topológicos se dice propia si para todo K compacto de $(Y, \mathcal{T}')$ se tiene que $f^{-1}(K)$ es un compacto de $(X, \mathcal{T})$.

- a) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico T_2 e $(Y, \mathcal{T}')$ un espacio topológico compacto. Prueba que si $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ es propia entonces f es continua. ¿Es cierto el recíproco?

Comprobaremos que si C es un cerrado de $(Y, \mathcal{T}')$ entonces $f^{-1}(C)$ es un cerrado de $(X, \mathcal{T})$. Observemos que C es compacto por ser un cerrado de un espacio topológico compacto. Como f es propia tenemos entonces que $f^{-1}(C)$ es un compacto de $(X, \mathcal{T})$ que es T_2 y por tanto $f^{-1}(C)$ es un cerrado de $(X, \mathcal{T})$. El recíproco no es cierto ya que la aplicación inclusión $i : ((1, 2), (\mathcal{T}_u)_{(1,2)}) \rightarrow ([0, 3], (\mathcal{T}_u)_{[0,3]})$ es continua pero no es propia.

- b) Prueba que toda aplicación continua $f : (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{S}^1, \mathcal{T})$ es propia, donde $\mathcal{T}$ es la topología inducida de la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

Consideremos K compacto de $\mathbb{S}^1$. Como $\mathbb{S}^1$ es T_2 tenemos que K es cerrado. Usando que f es continua tenemos entonces que $f^{-1}(K)$ es un cerrado de $\mathbb{S}^1$ que es compacto y por tanto $f^{-1}(K)$ es compacto.